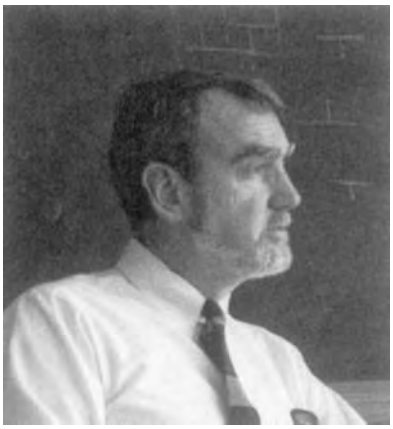
Robert P. Langlands, premi Abel 2018

Pilar Bayer
Universitat de Barcelona

El dia 20 de maig, el president de l'Acadèmia Noruega de les Ciències i de les Lletres, Ole M. Sejersted, anunciava que el premi Abel 2018 havia estat concedit a Robert Phelan Langlands «pel seu programa visionari que connecta la teoria de la representació amb la teoria de nombres».

En la seva setzena edició, el comitè de selecció del premi havia estat presidit pel professor John Rognes, del Departament de Matemàtiques de la Universitat d'Oslo; i integrat per les professores Alice Chang Sun-Yung, del Departament de Ciències de la Universitat de Princeton; Irene Fonseca, del Departament de Ciències Matemàtiques del Col·legi Mellon de Ciències, Pittsburgh; Marie-France Vignéras, de l'Institut de Matemàtiques de Jussieu, París; i pel professor Ben J. Green, de l'Institut de Matemàtiques de la Universitat d'Oxford.

Tres dies després s'impartiren les tradicionals Abel lectures. En aquesta ocasió van ser a càrrec del mateix Langlands, que dissertà «On the geometric theory»; de James Arthur, professor de la Universitat de Toronto, que presentà «The Langlands program: arithmetic, geometry and analysis», i d'Edward Frenkel, professor de la Universitat de Berkeley, que oferí la seva visió personal de «Langlands Program and Unification». Es tracta de tres magnífiques exposicions, d'estils diferents, que es poden seguir a `www.abelprize.no/artikkel/vis.html?tid=73149`.



Robert P. Langlands

Nascut al Canadà l'any 1936, Robert P. Langlands realitzà els seus estudis de matemàtiques als EUA, a la Universitat de British Columbia i a la Universitat de Yale. Es doctorà en aquesta darrera amb una tesi sobre representació de grups de Lie. Ha estat professor de la Universitat de Princeton; de la Universitat Tècnica de l'Orient Mitjà, localitzada a Ankara; de la Universitat de Yale; i de l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton (IAS). Actualment és professor emèrit de l'IAS. Entre d'altres distincions, està en possessió del premi Wolf de Matemàtiques 1995-1996 i del premi Shaw de Ciències Matemàtiques 2007, ambdós *ex aequo* amb Andrew Wiles.

Langlands és una de les ments matemàtiques més imaginatives i agosarades del nostre temps. La seva aportació principal a la matemàtica consisteix en un corpus coherent de conjectures que es coneix amb el nom de *programa de Langlands*. En el decurs dels anys, les propostes d'aquest programa han fet possibles molts avenços en teoria de nombres i, de ben segur, continuaran sent una font d'inspiració en la recerca científica de les properes dècades.

De la filosofia al programa de Langlands

La primera vegada que vaig sentir parlar de Langlands va ser a la fi de la dècada de 1970, a la Universitat de Regensburg. Günter Harder, professor de Bonn, hi impartí un col·loqui sobre l'aleshores anomenada *filosofia de Langlands*: una sèrie d'intuïcions matemàtiques que, tot i no tenir definicions ni enunciats precisos, ja presagiava un futur fascinant. A grans trets, en posar en relleu el paper de la simetria en teoria de nombres, s'intuïa la possibilitat d'accedir a dominis inexplorats.

A dia d'avui i després del treball de molta gent, la filosofia de Langlands ha derivat en el programa de Langlands. Tot i que continua mantenint el seu misteri, les seves propostes han guanyat en comprensió i credibilitat. Des d'un vessant geomètric, el programa de Langlands ha aconseguit interessar també la comunitat física (cf. [8]).

Robert P. Langlands rep el premi Abel 2018 de mans del rei Harald de Noruega. Fotografia: Thoms Brun

Els orígens

El pensament de Langlands es nodreix de moltes fonts, que provenen de la teoria de nombres, l'àlgebra (commutativa, no commutativa, homològica), la geometria (algebraica, algebraica aritmètica, diferencial), els grups de Lie i l'anàlisi harmònica.

A la pràctica, això es tradueix en una xarxa de connexions (provades o conjecturals) de resultats matemàtics que són deguts a Euler, Gauss, Dirichlet, Kummer, Kronecker, Riemann, Dedekind, Lie, Klein, Frobenius, Hilbert, E. Noether, Weyl, Hecke, Siegel, Artin, Hasse, Weil, Maass, Eichler, Selberg, Harish-Chandra, Bott, Tate, Serre, Grothendieck, Atiyah, Shimura, Jacquet, Deligne i Witten, entre d'altres.

Escriure un article de divulgació sobre una personalitat matemàtica tan singular té els seus riscos; un de no menor és que fàcilment pot esdevenir d'una longitud excessiva. Ateses les circumstàncies, he decidit fer un apropament a les propostes més significatives de Langlands sense precisar-hi la definició de la terminologia. Qui ho desitgi pot trobar els conceptes més bàsics en els dos volums [3], que contenen les exposicions del curs sobre representacions automorfes del grup lineal GL(2) impartit en el Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona 1996–1997.

Representació de grups

La teoria de la representació de grups permet matematitzar diferents tipus de simetries, en considerar totes les maneres en què els elements d'un grup actuen com aplicacions lineals d'un espai vectorial. Més precisament (i sense que serveixi de precedent), donats un grup topològic G i un espai vectorial V sobre un cos topològic F, una representació de G en el grup lineal $\mathrm{GL}(V)$ és un homomorfisme continu

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Si V és un espai vectorial de dimensió finita n, aleshores $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(n, F)$ i els elements del grup es visualitzen en forma de matrius; denotarem per $\mathrm{Rep}_n(G; F)$ el conjunt de les classes de representacions mòdul conjugació. Val a dir que, en general, cal considerar els casos en què V és un espai de Hilbert de dimensió no necessàriament finita i $\rho(G)$ consta d'operadors unitaris.

La teoria varia segons la natura dels grups i dels cossos que s'hi consideren. Històricament, la teoria de les representacions complexes ($F = \mathbb{C}$) dels grups finits és la primera a aparèixer i és deguda a Frobenius. En ella, però, ja hi podem trobar la majoria dels conceptes bàsics que es consideren en les situacions més generals.

Tota representació complexa d'un grup finit G és suma directa de representacions irreductibles, amb la qual cosa $\mathrm{Rep}(G; \mathbb{C}) = \cup_{n\geq 1}\mathrm{Rep}_n(G; \mathbb{C})$ és una categoria semisimple. A cada representació complexa $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ d'un grup finit G se li associa un caràcter, obtingut en assignar a cada element de $g \in G$ la traça de la matriu $\rho(g)$:

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_\rho(g) := \mathrm{tr}(\rho(g)), \quad g \in G.$$

Els caràcters satisfan les propietats següents:

(i) $\chi_\rho(1) = n, \quad \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}.$

(ii) $\chi_\rho(ugu^{-1}) = \chi_\rho(g),$ per a tot $g, u \in G.$

(iii) $\chi_{\rho_1\oplus\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}, \quad \chi_{\rho_1\otimes\rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}.$

I, la més important de totes, classifiquen les representacions:

(iv) $\rho_1 \simeq \rho_2 \Longleftrightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}.$

Emprarem la notació $[g] = \{ugu^{-1}; u \in G\}$ per denotar la classe de conjugació d'un element de G i $\Phi(G)$, pel conjunt d'aquestes classes de conjugació.

Donats un subgrup H de G i una representació $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, podem considerar la seva restricció

$$\mathrm{Res}_H^G\rho\colon H \to \mathrm{GL}(V).$$

I, donada una representació $\rho\colon H \to \mathrm{GL}(W)$ d'un subgrup, podem considerar l'operació d'inducció

$$\mathrm{Ind}_H^G \rho\colon G \to \mathrm{GL}(V_\rho),$$

on $V_\rho = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. En particular, se satisfà que $\mathrm{Reg}_G = \mathrm{Ind}_1^G Id$, on Reg_G és la representació regular de G, obtinguda en operar G de manera natural sobre ell mateix. Les operacions de restricció i d'inducció de representacions satisfan la fórmula de reciprocitat de Frobenius:

$$\langle \psi, \mathrm{Res}_H^G \chi \rangle_H = \langle \mathrm{Ind}_H^G \psi, \chi \rangle_G.$$

Aquí $\langle u, v \rangle_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v}(g)$ designa el producte hermític de funcions de classe.

Objectes centrals de l'estudi dels grups finits són les seves taules de caràcters, obtingudes en avaluar els caràcters de les representacions irreductibles en les classes de conjugació del grup. Les taules són quadrades: és a dir, en tot grup finit G, les classes de representacions irreductibles de G són parametritzables pels elements de $\Phi(G)$.

Les dificultats en determinar les representacions d'un grup finit varien molt segons que aquest sigui abelià, simètric, alternat, simple, diedral, nilpotent, resoluble, de tipus Lie, algebraic lineal reductiu, etc. Si prenem, per exemple, $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$, $q = p^f$, el nombre de classes de conjugació de G és igual a $q^2 - 1$. Les seves representacions irreductibles s'agrupen en la sèrie principal, que consta de $\frac{1}{2}(q^2 + q) - 1$ representacions, i les representacions cuspidals, en nombre igual a $\frac{1}{2}(q^2 - q)$.

En el cas no finit, hi ha teories específiques segons que el grup G sigui profinit, localment profinit, compacte, localment compacte, de Lie semisimple, de Lie resoluble, algebraic lineal, no compacte, etc. Menció apart mereixen les representacions galoisianes en què el grup que es representa és el grup de Galois absolut $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ d'un cos K.

En relació amb el cos F, es consideren preferentment cossos algebraicament tancats, com ara el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, les clausures algebraiques $\overline{\mathbb{Q}}_p$ dels cossos p-àdics, o bé les clausures algebraiques $\overline{\mathbb{F}}_q$ dels cossos finits. La característica del cos F és també quelcom a tenir en compte.

Les representacions dels grups són així mateix importants en física perquè descriuen com les simetries d'un sistema físic operen sobre les solucions de les equacions definidores. Des de la perspectiva històrica, és important mencionar que Bargmann estudià les representacions complexes del grup de Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$ i del grup lineal $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Provà que certes representacions d'aquest darrer grup, dites *temperades*, es corresponen bijectivament amb les representacions unitàries del grup de Weil $W_\mathbb{R}$ en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Aquí, $W_\mathbb{R} := \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*$, $j^2 = -1$, $ji = -ij$, $jzj^{-1} = \overline{z}$, per a $z \in \mathbb{C}$. Les representacions temperades es classifiquen en la sèrie esfèrica principal unitària, la sèrie no esfèrica principal unitària i la sèrie discreta.

La classe dels grups de Lie reductius lineals i connexos conté tots els grups de Lie connexos que són compactes o bé abelians. Conté també les famílies clàssiques de grups de Lie semisimples reals o complexos, com ara $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(m,n)$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$.

A la fi de la dècada de 1970, Langlands suggerí una descripció de les representacions admisibles i irreductibles dels grups de Lie reductius reals G. Avancem que, dividides en els anomenats *paquets* L, les representacions de G es classificarien en termes de certes representacions dels grups de Weil en el grup dual de Langlands ${}^LG$.

Cossos de nombres

Les equacions i els sistemes d'equacions diofantines estan definits per polinomis de coeficients racionals (en el més pur estil de Diofant d'Alexandria) o bé de coeficients enters. La resolució consisteix en la determinació de les seves solucions racionals o bé de les seves solucions enteres. Per a l'estudi de les equacions diofantines sovint cal estendre l'abast dels coeficients i permetre-hi nombres algebraics racionals i nombres enters algebraics. El nombres algebraics racionals es distribueixen en els cossos de nombres; és a dir, en extensions finites de $\mathbb{Q}$ contingudes en $\mathbb{C}$; la seva unió proporciona una clausura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. Sabem, per Dedekind, que els cossos de nombres K contenen anells d'enters algebraics, A_K, de propietats similars a les del subanell $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Q}$. Els anells A_K tenen una teoria de la divisibilitat que es tradueix en la factorització de manera única dels seus ideals (no trivials) en producte d'ideals primers.

Aquesta propietat determina que els cossos de nombres posseeixin funcions zeta, $\zeta(K,s)$, dites *de Dedekind*, expressables en forma de producte d'Euler d'un nombre infinit de termes. El cas més paradigmàtic és el de la funció zeta de Riemann, $\zeta(s)$, que es presenta quan $K=\mathbb{Q}$, i que reflecteix propietats demostrades o conjecturals dels nombres primers.

L'estudi aritmètic dels cossos de nombres s'inicià amb Fermat, Gauss i Kummer. A banda de $\mathbb{Q}$, els cossos de nombres més senzills de tractar són els cossos quadràtics, $[K:\mathbb{Q}]=2$. La seva consideració, expressada en un llenguatge diferent, es remunta a les *Disquisicions aritmètiques* de Gauss en tant que conté diverses demostracions de la llei de reciprocitat quadràtica. L'exemple següent és proporcionat pels cossos ciclotòmics, presents també en les *Disquisicions* i àmpliament tractats per Kummer. Segons un famós teorema de Dirichlet, l'estudi de la funció $\zeta(\mathbb{Q}(\zeta_m),s)$ del cos de les arrels m-èsimes de la unitat permet provar l'equidistribució dels primers p coprimers amb m en progressions aritmètiques mòdul m. Recordem dels cursos d'àlgebra que $G(\mathbb{Q}(\zeta_m)|\mathbb{Q})\simeq(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

En el primer terç del segle XX s'assoliren els resultats de la teoria de cossos de classes. Els teoremes d'aquesta teoria proporcionen informació aritmètica de les extensions finites i galoisianes de cossos de nombres, $L|K$, de grup de Galois $G(L|K)$ abelià; en particular, dels cossos de nombres abelians sobre $\mathbb{Q}$. Eines fonamentals en aquest estudi són, a més de les funcions zeta esmentades, les funcions L de Dirichlet, $L(s,\chi)$, definides per a caràcters de Dirichlet; les funcions L d'Artin, $L(s,\rho)$, associades a representacions galoisianes complexes; les funcions L de Hecke, $L(s,\psi)$, definides per a caràcters de Hecke; i les funcions L p-àdiques de la teoria local.

L'estudi de les funcions L conduí, en particular, a la llei de reciprocitat d'Artin, que generalitza la llei de reciprocitat quadràtica i altres lleis de reciprocitat clàssiques descobertes prèviament. Aquestes lleis de reciprocitat tenen cura del comportament dels ideals dels anells d'enters dels cossos de nombres. La seva formulació es pot sintetitzar en termes d'una igualtat de funcions L: quan $L|K$ és una extensió abeliana de cossos de nombres, tota funció L d'Artin de $L|K$ és una funció L de Hecke. Una conseqüència molt important de la teoria és que cada cos de nombres galoisià $K|\mathbb{Q}$, de grup de Galois G abelià o no, és una màquina de distribuir nombres primers p de $\mathbb{Z}$. En efecte, els nombres primers no ramificats en K (que són tots llevat d'un nombre finit) s'equidistribueixen en les diferents classes de conjugació del grup de Galois $G(K|\mathbb{Q})$, d'acord amb el teorema de densitat de Txebotarev. La classe de conjugació en $G(K|\mathbb{Q})$ que correspon a un primer p és l'anomenat *element de Frobenius*, $Frob_K(p)$. Com a conseqüència, en tota representació ρ de $G(K|\mathbb{Q})$, el polinomi característic de $\rho(Frob_K(p))$ estarà definit i d'ell se'n podrà extreure la informació numèrica proporcionada pels seus coeficients.

La presentació de la teoria de cossos de classes pot ser analítica (fent ús d'anàlisi complex, real, p-àdic i adèlic) o cohomològica (en què l'eina principal és donada per la cohomologia galoisiana). La teoria preveu versions locals i versions globals, que en gran part foren clarificades en la tesi de John Tate, premi Abel 2010.

Motius aritmètics

Des del punt de vista de la geometria aritmètica, l'estudi aritmètic dels cossos de nombres correspon a l'estudi aritmètic dels esquemes afins $(Spec(A_K),A_K)$, de fibra genèrica $(Spec(K),K)$. Els motius aritmètics són blocs cohomològics constituents de varietats o esquemes aritmètics i representen els trossos més petits que tenen definides les seves pròpies funcions L. Les varietats i els esquemes aritmètics, definits sobre cossos de nombres o cossos locals, posseeixen així mateix les seves funcions zeta i les seves funcions L, dites *motíviques*. Les més conegudes són les de Hasse-Weil, que parteixen de representacions galoisianes proporcionades pels grups de cohomologia ℓ-àdica.

La natura de les equacions definidores de les varietats aritmètiques ens porta a considerar famílies d'aquests objectes com a espais rígids (com ho són els enters $\mathbb{Z}$ dins de la recta real $\mathbb{R}$). En deformar-les, tot considerant-les definides per coeficients reals o complexos, es perd el caràcter aritmètic i s'obtenen famílies de varietats algebraiques.

Problemes clàssics de teoria de nombres varen propiciar a partir del segle XIX l'estudi de

funcions especials, com ara les funcions theta, les funcions modulars i les formes modulars o, més generalment, les funcions automorfes i les formes automorfes. Es tracta de seccions de fibrats de varietats (possiblement singulars) de la forma $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ definides a partir de subgrups aritmètics Γ de grups de Lie reals G que operen en espais $\mathcal{H}$ localment simètrics. Aquestes varietats reben el nom de *varietats de Shimura, de Hilbert, de Siegel*, etc. A banda del laplacià, sol actuar-hi l'àlgebra dels operadors de Hecke. Les simetries comporten en darrera instància l'existència de models definits sobre cossos de nombres, l'existència de models enters de fibres en principi controlables, i la de funcions L amb bones propietats analítiques (provades o conjecturals). Avaluades en punts especials, les funcions que parametritzen la varietat, convenientment normalitzades amb constants transcendents, proporcionen nombres algebraics que intervenen en la resolució de molts problemes diofantins. Per exemple, en aprofundir en aquest context trobaríem la teoria de la multiplicació complexa.

L'exemple més senzill el proporciona la circumferència: pensada com a quocient $2\pi\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$, la periodicitat i les propietats de les funcions trigonomètriques sinus i cosinus permeten deduir l'equació $X^2 + Y^2 = 1$, i la funció exponencial avaluada en els punts de divisió proporciona les arrels de la unitat.

En les varietats aritmètiques definides a partir de grups aritmètics confluueixen la geometria i l'anàlisi per donar una teoria de funcions susceptible de fer-se efectiva. Els cossos de funcions passen a visualitzar-se com a cossos de funcions automorfes; és a dir, periòdiques per l'acció de Γ. I no només les funcions tenen periodicitats sinó, també, les formes diferencials de tots els ordres, que proporcionen les anomenades *formes automorfes* respecte de Γ. Aquestes donen lloc a les representacions automorfes π de grups de Lie i a les funcions $L(s,\pi)$ associades.

Reciprocitat de Langlands

La formulació de lleis de reciprocitat general forma part del problema 9è de Hilbert. L'extensió de la teoria de cossos de classes a extensions no abelianes és en part encara conjectural. Segons Langlands, el que cal fer en aquest cas és relacionar representacions de grups de Galois amb representacions automorfes de grups algebraics reductius, tot preservant-ne les compatibilitats naturals. El fet es coneix com a *llei de reciprocitat de Langlands*. D'acord amb Langlands, les representacions automorfes d'un grup algebraic reductiu G definit sobre un cos global haurien d'estar relacionades, a través de funcions L, amb representacions de Galois valorades en un grup ${}^LG$, que rep avui el nom de L-grup o *dual de Langlands* de G.

Siguin K un cos de nombres i $\mathbb{A}_K$ l'anell de les seves adeles (que s'obté en considerar tots els cossos completats de K i els seus anells locals d'enters). En particular, segons Langlands, certes representacions automorfes

$$\pi\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_K) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$$

estan en correspondència bijectiva amb certes representacions del grup de Weil

$$\sigma\colon W_K \to {}^L\mathrm{GL}_{n,K} = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}).$$

El grup W_K és una extensió central del grup de Galois absolut G_K. Entre les representacions anteriors hi trobem les representacions que factoritzen en representacions galoisianes $\rho\colon G_K \to {}^L\mathrm{GL}_{n,K} = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. El grup ${}^LG$, dual de Langlands de G, és una extensió del grup de Galois absolut de K per un grup de Lie complex:

$${}^LG = {}^LG^0 \rtimes G(\overline{K}|K).$$

Les representacions automorfes provenen de l'anàlisi harmònica; les representacions galoisianes, de l'aritmètica. En certa manera, la llei de reciprocitat de Langlands preveu que determinades taules tornin a ser quadrades.

Les representacions anteriors proporcionen funcions L i l'estudi de les lleis de reciprocitat té motivacions profundes. Cal distingir entre les funcions L motíviques: $L(s,\rho)$, $L(s,\sigma)$, i les funciones L automorfes $L(s,\pi)$. En general, les primeres satisfan les propietats següents:

1. Estan definides per productes d'Euler que convergeixen en semiplans $\Re(s) \gg 0$.

2. A través dels valors que prenen en els seus punts crítics, on el producte d'Euler sol no estar definit, proporcionen informació aritmètica.

En relació amb les funcions L automorfes, fem notar que

1. Estan definides en $\mathbb{C}$.

2. Haurien de proporcionar prolongacions analítiques de les funciones L aritmètiques, i fer possible així la seva avaluació en els punts crítics.

Donat un cos de nombres K, considerem el conjunt $\Pi(K)$ de les representacions

$$\pi\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$$

automorfes i cuspidals. Conjecturalment, es té que

1? Existeix un grup $\mathbf{G}_{\Pi(K)}$, algebraic i reductiu sobre $\mathbb{C}$, tal que les classes d'equivalència de les representacions

$$\sigma\colon \mathbf{G}_{\Pi(K)} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

estan en correspondència bijectiva amb les classes dels elements isobàrics de $\Pi(K)$.

2? Existeix un morfisme $W_K \longrightarrow \mathbf{G}_{\Pi(K)}(\mathbb{C})$ amb imatge Zariski-densa.

3? El teorema de densitat de Txebotarev es generaliza en una llei de distribució de les classes de conjugació $[\sigma(\mathrm{Frob}_v)]$ dels elements de Frobenius en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

La teoria de cossos de classes correspon al cas $G = {}^LG = \mathrm{GL}(1)$. L'estudi de les formes modulars clàssiques s'inclou en el de $G = {}^LG = \mathrm{GL}(2)$. El grup $\mathrm{GL}(2)$ és l'exemple més senzill d'un grup reductiu no abelià.

Per procedir en el cas general, Langlands va veure la necessitat d'una fórmula estable de traces, que fou provada per Arthur. Juntament amb la prova per part de Ngô de l'anomenat *lema fonamental*, conjecturat per Langlands, aquests resultats han conduït a la classificació endoscòpica de les representacions automorfes dels grups de Lie clàssics en termes de les dels grups lineals generals. En aquest context es té que

G	${}^LG^0$
$\mathrm{SL}(n)$	$\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$
$\mathrm{PGL}(n)$	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$
$\mathrm{Sp}(2n)$	$\mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$
$\mathrm{SO}(2n+1)$	$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$

Functorialitat de Langlands

La llei de reciprocitat de Langlands és un cas particular d'un principi més general conegut com a *functorialitat de Langlands*, que tradueix certs homomorfismes entre L-grups ${}^LG$ i ${}^LG'$ en termes de relacions entre representacions automorfes de G i de G', compatibles amb la formació de funcions L.

En els anys 1970, Jacquet i Langlands van poder establir un primer cas de functorialitat per al grup lineal $\mathrm{GL}(2)$ definit sobre un cos de nombres i les seves formes internes torçades. Per a tal fi, utilitzaren la fórmula de les traces de Selberg i el treball de Langlands sobre el canvi base de $\mathrm{GL}(2)$. Langlands va provar altres casos de functorialitat, que jugaren un paper estratègic en la prova de Wiles del teorema de Fermat. En particular, el teorema de Langlands garanteix la prolongació analítica de les funcions L d'Artin per als cossos de nombres de grup de Galois tetraèdric.

La functorialitat unifica dràsticament una sèrie de resultats importants que inclouen la modularitat de les corbes el·líptiques definides sobre $\mathbb{Q}$ (Shimura-Taniyama-Weil) i la prova de la conjectura de Sato-Tate. També proporciona un suport a moltes altres conjectures pendents, com ara les conjectures de Ramanujan-Peterson, la de Selberg, i la de Hasse-Weil per a funcions zeta globals. L'estudi de la functorialitat dels grups algebraics reductius definits sobre cossos de nombres ha conegut un progrés considerable gràcies als treballs de molts experts, inclosos els de Drinfeld, Lafforgue i Ngô, tots tres medalles Fields. La teoria també ha evolucionat cap a contextos diferents, com les conjectures de Langlands sobre cossos locals, sobre cossos de funcions, i l'anomenat *programa de Langlands geomètric*.

Coda: Langlands per a melòmans

Des del punt de vista de l'anàlisi harmònica, i per analogia amb l'anàlisi de Fourier aplicat a l'estudi del so, podem interpretar les formes automorfes respecte d'un grup aritmètic Γ com vibracions d'una varietat $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}$. Aquestes vibracions s'expressaran com a combinació lineal de vibracions elementals amb coeficients determinats per l'amplitud dels seus harmònics. Interessaran especialment les vibracions ben temperades, donades pels vectors propis del

laplacià i dels operadors de Hecke que actuen com a simetries de X.

Des del punt de vista de la teoria de nombres, podem pensar que els motius aritmètics juguen en geometria aritmètica un paper anàleg al dels motius en la composició musical. Fem notar que fou precisament en el context musical on s'inspirà Grothendieck per donar nom a aquests objectes matemàtics (cf. [26]). I podem interpretar els coeficients de les sèries L motíviques com l'ADN d'aquests motius.

En raonar d'acord amb aquestes analogies, la filosofia de Langlands permet sospitar que l'ADN dels motius que provenen de varietats X altament simètriques hauria de quedar determinat per les vibracions ben temperades d'aquestes varietats. Òbviament, això no és d'esperar de qualsevol motiu aritmètic; només d'aquells suficientment simètrics.

Preguntes similars traduïdes a objectes del món real serien:

1. Es pot, a partir de l'anàlisi harmònica de la veu d'una cantant, determinar el seu ADN?

2. Es pot, a partir de l'ADN d'una cantant, determinar el timbre, és a dir, els harmònics de la seva veu?

Matemàticament, la primera pregunta tindria una resposta en la línia de les congruències d'Eichler-Shimura i la segona, en la de Shimura-Taniyama-Weil, totes dues integrables en el programa de Langlands.

Com que, a la llarga, des de les partícules elementals fins als forats negres tot acaba vibrant, no és estrany que a dia d'avui es cerqui l'aplicació del pensament de Langlands a l'estudi de la teoria de cordes, en tant que aquestes són vibracions de les partícules elementals. Des d'un punt de vista físic, podem dir que Langlands permet reformular la pregunta de si «el món és matemàtic» en la de si «el món és aritmètic».

Referències

[1] Bargmann, V., «Irreducible unitary representations of the Lorenz group». *Ann. of Math.* (2) 48 (1947), 568–640.

[2] Bargmann, V., On unitary ray representations of continuous groups». *Ann. of Math.* (2) 59 (1954), 1–46.

[3] Bayer, P.; Travesa, A. (eds.), «Representacions automorfes de GL(2)». Volums I, xiii+213 p., i II, xiii+224 p. Notes del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC), 2. Barcelona, 1997. ISBN: 84-923250-2-X.

[4] Breuil, C.; Conrad, B.; Diamond, F.; i Taylor, R., «On the Modularity of Elliptic Curves Over $\mathbb{Q}$: Wild 3-Adic Exercises». *J. Amer. Math. Soc.* 14 (2001), 843–939.

[5] Gauss, C. F.: *Disquisicions aritmètiques.* Traducció i pròleg de Griselda Pascual Xufré, 1996. xxviii+654 p. Societat Catalana de Matemàtiques. ISBN 84-7283-313-5. Primera edició: *Disquisitiones arithmeticæ.* Lipsiæ, Fleischer, 1801.

[6] Harder, G.; Langlands, R. P.; Rapoport, M., «Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen». *J. Reine Angew. Math.* 366 (1986), 53–120.

[7] Jacquet, H.; Langlands, R. P., «Automorphic forms on GL(2)». Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114, vii+548 p. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[8] Kapustin, A.; Witten, E., «Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program». *Commun. Number Theory Phys.* 1 (2007), núm. 1, 1–236.

[9] Labesse, J.-P.; Langlands, R. P., «L-indistinguishability for $SL(2)$». *Canad. J. Math.* 31 (1979), núm. 4, 726–785.

[10] Langlands, R.,P., «The Dirac monopole and induced representations». *Pacific J. Math.* 126 (1987), núm. 1, 145–151.

[11] Langlands, R. P., «Problems in the theory of automorphic forms. *Lectures in modern analysis and applications*, III», p. 18–61. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 170, Springer, Berlin, 1970.

[12] Langlands, R. P., «Shimura varieties and the Selberg trace formula». *Canad. J. Math.* 29 (1977), núm. 6, 1292–1299.

[13] Langlands, R. P., «Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura». Journées de Géométrie Algébrique de

Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III, p. 125–154, *Astérisque*, 65, Soc. Math. France, Paris, 1979.

[14] Langlands, R. P., «On the zeta functions of some simple Shimura varieties». *Canad. J. Math.* 31 (1979), núm. 6, 1121–1216.

[15] Langlands, R. P., *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen.* Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, p. 205–246, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[16] Langlands, R. P., *L-functions and automorphic representations. Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Helsinki, 1978), p. 165–175, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

[17] Langlands, R. P., *Base change for* GL(2). Annals of Mathematics Studies, 96. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980. vii+237 p. ISBN: 0-691-08263-4; 0-691-08272-3.

[18] Langlands, R. P., «Orbital integrals on forms of SL(3). I». *Amer. J. Math.* 105 (1983), núm. 2, 465–506.

[19] Langlands, R. P., *Les débuts d'une formule des traces stable.* Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 13. Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1983. v+188 p.

[20] Langlands, R. P., *Mathematical heritage of Hermann Weyl* (Durham, NC, 1987), 25–33, Proc. Sympos. Pure Math., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[21] Langlands, R. P., «Representation theory: its rise and its role in number theory». Proceedings of the Gibbs Symposium (New Haven, CT, 1989), 181–210, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1990.

[22] Langlands, R. P., «Reflexions on receiving the Shaw Prize». *On certain L-functions*, 297–308, *Clay Math. Proc.*, 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[23] Langlands, R.,P., A prologue to "Functoriality and reciprocity" Part I. *Pacific J. Math.* 260 (2012), núm. 2, 582–663.

[24] Langlands, R. P.; Rapoport, M., «Shimuravarietäten und Gerben». *J. Reine Angew. Math.* 378 (1987), 113–220.

[25] Langlands, R. P.; Shelstad, D., «Orbital integrals on forms of SL(3). II». *Canad. J. Math.* 41 (1989), núm. 3, 480–507.

[26] Mazur, B., «What is... a motive?». *Notices Amer. Math. Soc.* 51 (2004), núm. 10, 1214–1216.

[27] Serre, J-P., «Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$». *Duke Math. J.* 54 (1987), núm. 1, 179–230.

[28] Taylor, R.; Wiles, A., «Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras». *Ann. of Math.* (2) 141 (1995), núm. 3, 553–572.

[29] Wiles, A., «Modular elliptic curves and Fermat's last theorem». *Ann. of Math.* (2) 141 (1995), núm. 3, 443–551.